

2018年天津红桥区理科高三一模数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

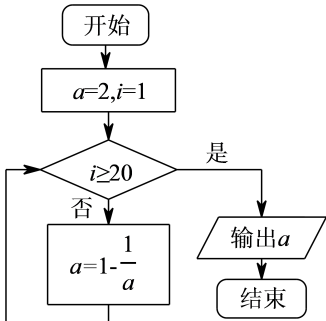
1. 已知集合 $A = \{x ||x + 1| < 1\}$, $B = \left\{x | \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \geq 0\right\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = (\quad)$.

A. $(-2, -1)$ B. $(-2, -1]$ C. $(-1, 0)$ D. $[-1, 0)$

2. 平面 $\alpha //$ 平面 β 的一个充分条件是 () .

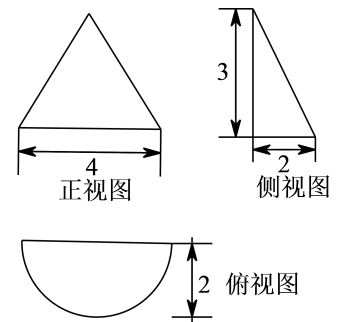
- A. 存在一条直线 a , $a // \alpha$, $a // \beta$
- B. 存在一条直线 a , $a \subset \alpha$, $a // \beta$
- C. 存在两条平行直线 a , b , $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a // \beta$, $b // \alpha$
- D. 存在两条异面直线 a , b , $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a // \beta$, $b // \alpha$

3. 已知程序框图如下图所示，则执行该程序后输出的结果是 () .



- A. 2 B. 1 C. -1 D. $\frac{1}{2}$

4. 若某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 () .



- A. π B. 2π C. 3π D. 4π

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$, 且 $\sin A = 2\sin B \cos C$, 则 $\triangle ABC$ 为 () .

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 钝角三角形

6. 设斜率为2的直线 l 过抛物线 $y^2 = ax (a \neq 0)$ 的焦点 F , 且与 y 轴交于点 A , 若 $\triangle OAF$ (O 为坐标原点) 的面积为4, 则抛物线方程为 () .

- A. $y^2 = \pm 4x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = \pm 8x$ D. $y^2 = 8x$

7. 已知 $A(-3, 0)$, $B(0, 2)$, O 为坐标原点, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC = 45^\circ$, 设 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OB} (\lambda \in \mathbf{R})$ 则 $\lambda =$ () .

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+4) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

给出下列命题:

- ① 函数 $f(x)$ 一定是周期函数;
 ② 函数 $f(x)$ 在区间 $[-6, -4]$ 上为增函数;
 ③ 直线 $x = -4$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴;
 ④ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-6, 6]$ 上有且仅有4个零点.

其中正确命题的个数是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

9. 已知复数 $z = (2 + i)(x - i)$ 为纯虚数，其中 i 为虚数单位，则 x 的值为 _____ .

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，过双曲线 $C : x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点 F 作 x 轴的垂线 l ，则 l 与双曲线 C 的两条渐近线所围成的三角形的面积是 _____ .

11. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = a - 2t \\ y = -4t \end{cases}$ （ t 为参数），曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2$ ，若直线 l 与曲线 C 有公共点，则实数 a 的取值范围为 _____ .

12. 数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 中， $a_n = \ln \frac{\beta^n + 1}{\beta^n - 1} + 2n$ ， $b_n = \ln \frac{\beta^n - 1}{\beta^n + 1} - n$ ， β 为常数，若 $a_8 = 20$ ，则 $b_8 =$ _____ .

13. 已知 x, y 为正实数，则 $\frac{4x}{4x + y} + \frac{y}{x + y}$ 的最大值为 _____ .

14. 某次联欢会要安排3个歌舞类节目，2个小品类节目和1个相声类节目的演出顺序，则同类节目不相邻的排法种数是 _____ .

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值.

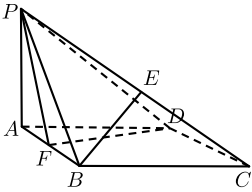
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的最大值和最小值, 及相应的 x 的值.

16. 袋中装有8个大小相同的小球，其中1个黑球，3个白球，4个红球．

(1) 若从袋中一次摸出2个小球，求恰为异色球的概率．

(2) 若从袋中一次摸出3个小球，且3个小球中，黑球与白球的个数都没超过红球的个数，记此时红球的个数为 X ，求 X 的分布及数学期望 $E(X)$ ．

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $PA = 1$ ， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 PC 的中点， F 是 AB 的中点。



- (1) 求证： $BE \parallel$ 平面 PDF .
- (2) 求证：平面 $PDF \perp$ 平面 PAB .
- (3) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成的锐二面角的大小 .

18. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = a_{n-1} + n (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_2 , a_3 的值 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(3) 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和 S_n , 求证 : $S_n - 2 < 0$.

19. 已知函数 $y = f(x) = -x^3 + ax^2 + b (a, b \in \mathbf{R})$.

(1) 要使 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围 .

(2) 当 $a > 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 的极小值和极大值分别为 $1, \frac{31}{27}$, 试求函数 $y = f(x)$ 的解析式 .

(3) 若 $x \in [0, 1]$ 时, $y = f(x)$ 图象上任意一点处的切线倾斜角为 θ , 当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 时, 求 a 的取值范围 .

20. 已知中心在坐标原点 O ，焦点在 x 轴上的椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，且经过点 $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若 F 是椭圆 C 的右焦点，过 F 的直线交椭圆 C 于 M 、 N 两点， T 为直线 $x = 4$ 上任意一点，且 T 不在 x 轴上。

1 求 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN}$ 的取值范围。

2 若 OT 平分线段 MN ，证明： $TF \perp MN$ (其中 O 为坐标原点) 。